

# Problemas de tres jarras



## Taller de Talento Matemático de Navarra

Tudela, 16 de mayo 2025

En esta sesión vamos a pensar sobre una clase de problemas clásicos, llamados **problemas de tres jarras**. Estos problemas nos piden que dividamos en partes iguales un líquido utilizando varias jarras, de distintas capacidades, que nos dan sin graduar. Quizá el problema más famoso es el que, según se dice, le propusieron a Siméon Denis Poisson, gran matemático francés del siglo XIX, cuando era un niño. El enunciado es el siguiente:

**1. Dos amigos tienen una jarra con 8 litros de agua que quieren repartirse a partes iguales. Para ello disponen también de otras dos jarras vacías, la primera con 5 litros, y la otra con 3 litros de capacidad. ¿Cómo pueden medir exactamente 4 litros de agua?**

Pensad unos minutos sobre el problema y anotad vuestras ideas en el recuadro. Cuando hayáis terminado, responded a las siguientes cuestiones:

**2. ¿Habéis utilizado alguna forma de representar las cantidades de las jarras en cada momento? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo las habéis representado?**

**3. ¿Habéis resuelto el problema? ¿Cómo lo habéis hecho?**

4. ¿Pensáis que puede haber más de una solución? ¿Podrías haber hecho otros trasvases?

5. ¿Qué habría ocurrido si el problema no tuviera solución?

Ahora que habéis reflexionado sobre el problema, nos preguntamos...

**¿Podemos pensar en alguna estrategia que nos permita resolver fácilmente cualquier problema de este tipo?**

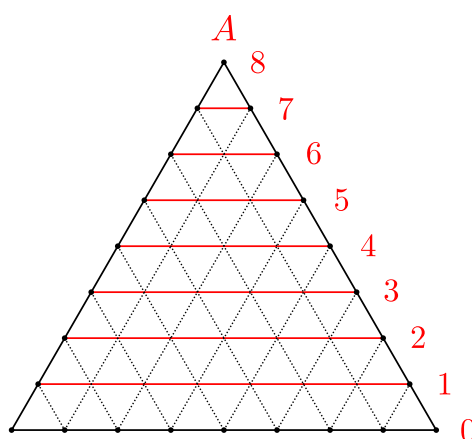
6. Si queremos representar nuestro problema gráficamente, ¿qué objeto geométrico podemos utilizar? Recordad que tenemos TRES jarras...

7. ¿Qué clase de «objeto» podemos usar?

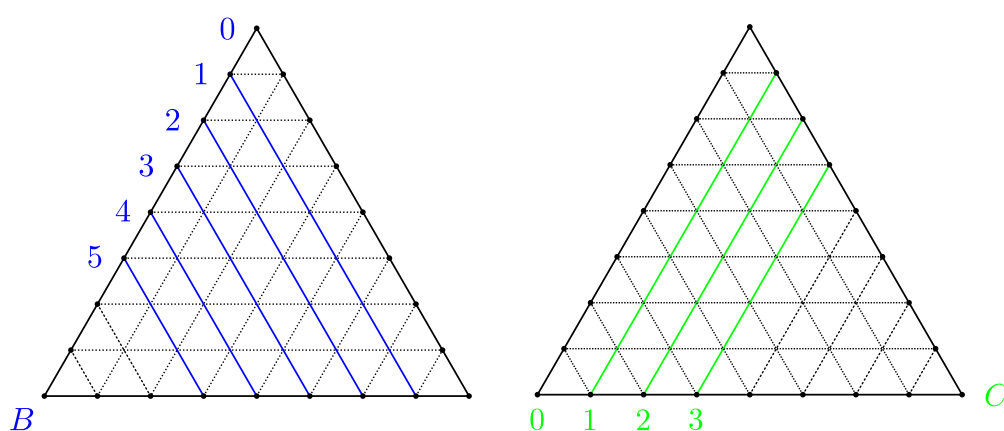
8. ¿Qué tamaño tendría que tener?

Como tenemos **tres** jarras, lo más natural es utilizar un triángulo para referirnos a las capacidades de cada una de ellas. Además, como cada jarra tiene la misma importancia que las demás, parece lógico usar un triángulo equilátero. Por último, como la jarra con más capacidad es de 8 litros, quizá necesitemos un triángulo equilátero de ¿lado 8? ¿altura 8? No está muy claro qué nos conviene...

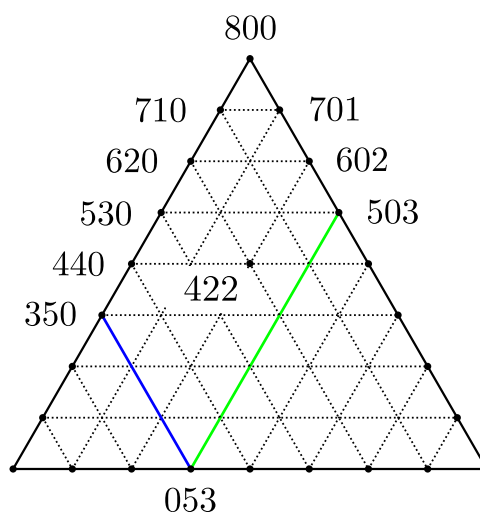
Usando el papel punteado, dibujamos un triángulo  $ABC$  de altura 8. Para la primera jarra, que llamaremos jarra **A**, podemos pensar los litros que contiene como niveles horizontales, paralelos al lado  $\overline{BC}$ .



De igual modo, podemos pensar en niveles paralelos a los lados  $\overline{CA}$  y  $\overline{AB}$  del triángulo para representar cuántos litros contienen las jarras  $B$  y  $C$ .



Claro que, como en las jarras  $B$  y  $C$  sólo caben 5 litros y 3 litros, respectivamente, podríamos dibujar, como mucho, 5 niveles azules y 3 niveles verdes. En la siguiente figura vemos que las cantidades de agua que pueden contener nuestras tres jarras se encuentran limitadas por el paralelogramo coloreado. A este paralelogramo, que contiene todas las situaciones *posibles* de nuestro problema, lo llamamos **región factible**.



Ahora, cada punto de la retícula indica cuántos litros hay en la jarra  $A$ , cuántos hay en la jarra  $B$  y cuántos hay en la jarra  $C$ . Podemos representar esto escribiendo  $XYZ$ , donde  $X$  representa los litros que contiene la jarra  $A$ ,  $Y$  representa los litros que contiene la jarra  $B$  y  $Z$  representa los litros que contiene la jarra  $C$ .

9. ¿Qué situación representa el vértice 800? ¿Y el punto 440?

10. ¿Cuánto suman siempre las coordenadas  $XYZ$ ? ¿Tiene esto sentido?

11. ¿Podrías inventar un problema en el que la región factible sea un hexágono, un pentágono o un trapecio? ¿Cuál sería el problema en el que la región factible es todo el triángulo?

Todo esto está muy bien, pero no sirve de mucho si no sabemos representar qué ocurre cuando trasvasamos el agua que contiene la jarra  $A$  a las jarras  $B$  o  $C$ . Vamos a poner un ejemplo: imaginad que estamos en el punto de coordenadas **350**. ¿Qué opciones tendríamos?

- **Opción 1.** Trasvasar 5 litros de la jarra  $B$  a la jarra  $A$ . Llegamos al punto **800** (inicio).
- **Opción 2.** Trasvasar 3 litros de la jarra  $B$  a la jarra  $C$ . Llegamos al punto **323**.
- **Opción 3.** Trasvasar 3 litros de la jarra  $A$  a la jarra  $C$ . Llegamos al punto **053**.

**¿Qué podemos concluir de esto?**

12. Al trasvasar agua de  $A$  a  $B$ , ¿qué sucede con el agua que hay en  $C$ ?

13. En consecuencia, ¿cuál es la representación gráfica de un trasvase de  $A$  a  $B$ ?

14. ¿De dónde a dónde va ese segmento?

15. ¿Puede el segmento detenerse en el interior de la región factible?

16. Esto que hemos dicho para trasvasar agua de **A** a **B**, ¿sirve en los otros casos?

Vamos a poner en claro lo que hemos descubierto hasta ahora para ponernos manos a la obra y resolver el problema. Lo que sabemos es:

- Tenemos que comenzar nuestro dibujo en el punto **800**, ya que inicialmente tenemos 8 litros en la jarra **A**, y ninguno en las jarras **B** y **C**.
- Para hacer un trasvase tenemos que dibujar segmentos paralelos a los lados del triángulo equilátero inicial, de forma que siempre unamos puntos del borde de nuestra región factible. **Cuidado... ¡No podemos detenernos en el interior!**
- Así, vamos trazando un camino como si fuéramos «rebotando» por las paredes de la región factible, siguiendo trayectorias rectas paralelas a los lados.
- Habremos acabado si conseguimos que nuestro camino llegue en algún momento al punto **440**, que es cuando tendremos el agua repartida **a partes iguales**.

**¡Ahora, os toca a vosotros/as!**

**Usad el papel triangulado para dibujar el camino adecuado y resolver el problema en un minuto...**

17. ¿Cuál es la solución?

Ahora que habéis resuelto este problema, podéis pensar en los siguientes... ¿Y si tuviéramos otras medidas? ¿Siempre hay solución?

**18. Supongamos que las jarras vacías son de 2 y 6 litros, y la jarra llena es de 8 litros. ¿Podríamos medir exactamente 4 litros de agua? ¿Qué cantidades pueden medirse en este caso?**

**19. ¿Qué sucede si las jarras son de 4, 6 y 10 litros, respectivamente? ¿Y con 5, 6 y 11 litros?**

Por último, aquí tenéis dos problemas más para pensar un rato más en vuestras casas. ¡Mandadnos vuestras soluciones!

**20. Tenemos tres jarras de 7, 6 y 3 litros de capacidad. En la primera jarra hay 3 litros de agua, la segunda contiene otros 3, mientras que la tercera sólo contiene 2. Demuestra que podemos medir cualquier número entero de litros entre 1 y 8 haciendo trasvases adecuados entre las jarras.**

**21. Un amigo le dice a otro: «me he comprado tres jarras que tienen 8, 6 y 4 litros de capacidad. De la fuente del pueblo puedo sacar hasta 10 litros, que quiero dividir en dos partes iguales exactamente. ¿Podría hacerlo de algún modo con las jarras que tengo?»**

Sabiendo la solución del problema... ¿Podrías haberlo razonado más rápido de alguna otra manera teniendo en cuenta qué clase de números son las capacidades de las jarras del amigo y la cantidad de litros que quiere medir?

**¡Nos vemos en la siguiente sesión del  
Taller de Talento Matemático de Navarra!**

